Απ1. Τσίρδης — No. — Date 16/10/17

Ακολουθίες

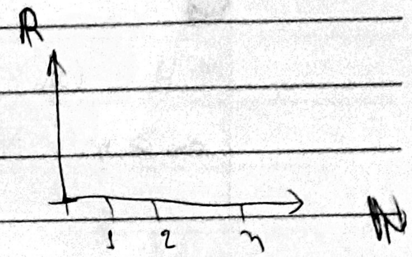
1) Ορισμός: Κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών

Συμβολισμός $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Αντί να γράφουμε $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$

γράφουμε $a_1, a_2, \ldots, a_n$

a_n λέγεται n-οστός όρος



Γνωρίζουμε μια ακολουθία όταν έχουμε τύπο για το n-οστό όρο

Π.χ. $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+4}$, $n \in \mathbb{N}$

$a_1 = \dfrac{1+1}{1+4} = \dfrac{2}{5}$

$a_2 = \dfrac{3}{8}$ κ.ο.κ.

Επίσης γνωρίζουμε μια ακολουθία (a_n) αν έχουμε αναδρομικό τύπο

π.χ. $a_1 = 1$ $\quad a_{n+1} = 7a_n - 3$, $n \in \mathbb{N}$

Τότε $a_2 = 7a_1 - 3$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_2 = 7 \cdot 1 - 3 = 4$

$a_3 = 7a_2 - 3 = 7 \cdot 4 - 3 = 25$

Π.χ. $a_1 = 1$ $\quad a_2 = 1$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $\quad n \in \mathbb{N}$ (ακολουθία Fibonacci)

$a_3 = a_2 + a_1 = 2$.

No. Date

3) Φραγμένες ακολουθίες

Έστω (a_n) μια ακολουθία

- Η (a_n) λέγεται άνω φραγμένη αν υπάρχει σταθερά $M \in \mathbb{R}$ τ.ω. $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Η (a_n) λέγεται κάτω φραγμένη αν υπάρχει σταθερά $m \in \mathbb{R}$ τ.ω. $a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Η (a_n) λέγεται φραγμένη αν είναι <u>και</u> άνω <u>και</u> κάτω φραγμένη. Δηλαδή αν υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τ.ω. $m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

- Η (a_n) λέγεται απόλυτα φραγμένη αν $\exists\ \theta > 0$ τ.ω. $|a_n| \leq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Θεώρημα</u>: Η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απόλυτα φραγμένη

<u>Απόδειξη</u>

$\Rightarrow$ Έστω (a_n) είναι φραγμένη.

Δηλαδή $\exists\ m, M \in \mathbb{R}$ τ.ω. $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Θέτω $\theta = \max(|m|, |M|)$.

$\theta \geq |M| \geq M$

$\theta \geq |m| \geq -m$

$-\theta \leq m \leq a_n \leq M \leq \theta \quad , n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n| \leq \theta \quad , n \in \mathbb{N}$

Άρα η a_n είναι απόλυτα φραγμένη

No. Date

($\Leftarrow$) Έστω (a_n) είναι απόλυτα φραγμένη, όπ? $\exists \theta > 0$
$|a_n| \leq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Θέτουμε $-\theta = m$ $\qquad -\theta \leq a_n \leq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\theta = M$

Άρα $-\theta$ κάτω φράγμα και θ είναι άνω φράγμα
άρα η a_n φραγμένη.

Παράδειγμα
$a_n = \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}$

$a_n > 0$ άρα σίγουρα είναι κάτω φραγμένη
$n \geq 1$
$\hookrightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \longrightarrow a_n \leq 1$

Η a_n είναι άνω φραγμένη από τη μονάδα

Παράδειγμα
$a_n = \frac{3\sin n - 4\cos n}{n^5}$

Ν.Δ.Ο. (a_n) είναι φραγμένη (το ίδιο είναι να δείξω ότι είναι απόλυτα φραγμ.)

$|a_n| = \frac{|3\sin n - 4\cos n|}{n^5} \leq \frac{3|\sin n| + 4|\cos n|}{n^5}$

$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{n^5} = \frac{7}{n^5} \leq 7$

Άσκηση: $a_n = \frac{5\sin n + 7}{n^8 + 1}$ Ν.Δ.Ο. a_n φραγμένη

No. Date

Δείχνω ότι είναι απόλυτα φραγμένη.

$$|a_n| = \frac{|5\sin n + 7|}{n^8+1} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$|a_n| \leq \frac{5\cdot 1 + 7}{n^8+1} = \frac{12}{n^8+1} \leq \frac{12}{2} = 6.$$

$n^8 \geq 1$

$n^8 + 1 \geq 2$

$\frac{1}{n^8+1} \leq \frac{1}{2}$

Παράδειγμα

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3 \dots n}{n^n} \leq \frac{n\cdot n\cdot n \dots n}{n^n} = \frac{n^n}{n^n} = 1$$

Η a_n είναι άνω φραγμένη και έχει τη μονάδα ως άνω φράγμα $a_n \leq 1$.
Και είναι κάτω φραγμένη από το μηδέν.

Παράδειγμα

$$a_n = \frac{n}{3^n} \quad n \in \mathbb{N}$$

Η a_n είναι κάτω φραγμένη με κάτω φράγμα το μηδέν

ανισότητα Bernuli

$$3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n$$

Άρα $a_n \leq \frac{n}{1+2n} \leq \frac{1\cdot 2n}{2\cdot 1+2n} < \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{1+2n} = \frac{1}{2}$

$a_n \leq \frac{1}{2}$ Άρα άνω φραγμένη

http://www.tanenghong.com